

DIE THERMODYNAMISCHE TEMPERATURSKALA UND IHRE REALISIERUNG UNTERHALB 90°K

H. VAN DIJK

Kamerlingh Onnes Laboratorium der Rijksuniversiteit, Leiden, Holland

EINFÜHRUNG

Die Temperaturmessungen unterhalb 90°K schliessen sich hauptsächlich in vier Weisen an die thermodynamische Temperaturskala an:

- (a) durch Messungen mit einem Gasthermometer;
- (b) mit Hilfe einer thermodynamischen Beziehung für den Sättigungsdruck eines verflüssigten Gases;
- (c) durch Benutzung des Gesetzes von Curie oder von Curie-Weiss für paramagnetische Salze;
- (d) unter Zuhilfenahme eines umkehrbaren Kreisprozesses.

Gasthermetrische Messungen

Messungen mit Gasthermometern sind vielfach zu folgenden Zwecken benutzt worden:

- (a) zur Bestimmung von Fixpunkten (Siedepunkte, Tripelpunkte, Transformationspunkte);
- (b) zur Messung von Sättigungsdrücken kondensierter Gase;
- (c) zur Eichung von Sekundärthermometern;
- (d) schliesslich wird das Gasthermometer manchmal wie ein Interpolationsthermometer benutzt.

HAUPTFIXPUNKTE

Die wichtigsten Fixpunkte für das Gebiet der niedrigen Temperaturen sind die Siedepunkte von Sauerstoff, Wasserstoff und Helium. In *Tabelle 1* sind die Ergebnisse von den genauesten Arbeiten zusammengestellt. Die Tabelle gibt das Ergebnis einer konsistenten Neuberechnung.

In der Internationalen Temperaturskala hat der Siedepunkt des Sauerstoffes den Wert $-182,97^{\circ}\text{C}$. Diesen hat man 1927 angenommen und er stimmt noch immer bis auf $0,01^{\circ}\text{C}$ überein mit dem Wert, den wir heute diesem Punkt zuordnen würden. Da die Temperatur des Eispunktes 1954 auf $273,15^{\circ}\text{K}$ festgesetzt worden ist, muss man in der Internationalen Kelvin-Skala dem Siedepunkt von Sauerstoff den Wert $90,18^{\circ}\text{K}$ geben.

Der in *Tabelle 1* gegebene und in thermodynamisch konsistenter Weise berechnete Wert für den Siedepunkt des normalen Wasserstoffs ist fast genau gleich dem Mittelwert der von verschiedenen Instituten empfohlenen Werte, wie es *Tabelle 2* zeigt.

Die Neuberechnung des Siedepunktes von Helium hat ein Resultat gegeben, das sich nur um $0,001^{\circ}\text{K}$ von dem von Schmidt und Keesom 1937 empfohlenen Wert unterscheidet. Der Wert $4,215^{\circ}\text{K}$ ist in der Definition der T_{68} -Skala für Temperaturen zwischen $1,0$ und $5,2^{\circ}\text{K}$ benutzt worden.

H. VAN DIJK

Tabelle 1. Die normalen Siedepunkte*

		T_S (°K)	T_B (°K)	
<i>Sauerstoff</i>	P.T.R. 1931-32	Heuse und Otto	90,191	273,15
	Leiden 1940	Frl. Van der Horst	90,160	273,15
	Japan 1935	Aoyama und Kanda†	90,170	273,15
	P.S.U. 1953	Aston und Moessen	90,150	273,15
		Mittelwert	90,168	
<i>Wasserstoff</i>	P.T.R. 1931	Heuse und Otto	20,381	273,15
	Leiden 1931	Keesom, Bijl, V. d. Horst	20,382	273,15
	N.B.S. 1939	Hoge und Brickwedde	20,384	90,168
	P.S.U. 1951	Moessen und Aston	20,370	273,15 1 × 90,168 2 ×
	U.S.S.R. 1952	Borovik-Romanow und Strelkow	20,375	90,168
		Mittelwert	20,378	
<i>Helium</i>		Kamerlingh Onnes und Weber	4,216	273,15
	1913	Schmidt und Keesom	4,215 ₄	20,378
	1937	Berman und Swenson	4,215	20,378
	1954	Isothermen von Keller	4,215	
	1955	Mittelwert	4,215	

* Die normalen Siedepunkte des normalen Sauerstoffs, Wasserstoffs und Heliums sind in konsistenter Weise hergeleitet aus den ursprünglichen Messungen. Es ist für die Temperatur des Eispunktes der Wert 273,15°K genommen, für den Druckkoeffizient die Beziehung $\alpha_{s,He} = 0,0036099 - 0,32 \times 10^{-8} p_0$ (cm Hg) benutzt, und $T - T_{s,He}$ mit der Tabelle von W. H. Keesom berechnet worden. T_B ist die Bezugstemperatur.

† Wasserstoffgasthermometer.

Tabelle 2. Der Siedepunkt des normalen Wasserstoffs

		T_S (°K)	T_B (°K)
P.T.R. 1931	Procès Verbaux C.I.P.M. 1952, T 60	20,38	273,16
K.O.L. 1931	Procès Verbaux C.I.P.M. 1952, T 45	20,382	273,15
N.B.S. 1939	<i>J. Research N.B.S.</i> , 22 , 351 (1939)	20,39	90 19
P.S.U. 1951	<i>J. Chem. Phys.</i> 22 , 2096 (1954)	20,365	273,16 und 90,154
I.M. 1951	Procès Verbaux C.I.P.M. 1952, T_{31} und T_{38}	20,380	
	Mittelwert	20,379	

Aus dem Vorhergehenden ist deutlich, dass die wichtigsten Fixpunkte für die Temperaturmessung unterhalb 90°K heute mit einer für die jetzige Praxis hinlänglichen Genauigkeit bekannt sind.

SEKUNDÄRE FIXPUNKTE

Die wichtigsten sekundären Fixpunkte sind der Siedepunkt von N_2 , die Tripelpunkte von Argon, Sauerstoff und normalem Wasserstoff, der Siedepunkt und der Tripelpunkt von Parawasserstoff und der λ -Punkt von Helium. Die Zahlenwerte dieser Fixpunkte sind in *Tabelle 3* zusammengestellt worden.

Nicht alle sekundären Fixpunkte sind unmittelbar mit einem Gasthermometer gemessen worden.

DIE THERMODYNAMISCHE TEMPERATURSKALA

Tabelle 3. Sekundäre Fixpunkte (°K)

Argon	Siedepunkt	83,81
Stickstoff	Siedepunkt	77,35
Sauerstoff	Tripelpunkt	54,34
Parawasserstoff	Siedepunkt	20,27
normaler Wasserstoff	Tripelpunkt	13,95
Parawasserstoff	Tripelpunkt	13,81
Helium	λ -Punkt	2,172

Zur genauen gasthermometrischen Bestimmung der Fixpunkte braucht man die Virialkoeffizienten des benutzten Gases. Die diesbezüglichen Korrekturen sind für das normale Heliumgasthermometer von Heuse und Otto, Keesom und Tuyn und von Keyes berechnet worden. Die Ergebnisse dieser Autoren unterscheiden sich nur um einige wenige tausendstel Grade.

DIE BENUTZUNG DES SÄTTIGUNGSDRUCKES FÜR TEMPERATURMESSUNGEN

Niedrige Temperaturen werden fast immer mit verflüssigten Gasen hergestellt. Da nun der Sättigungsdruck eine eindeutige Funktion der Temperatur darstellt, wird er sehr häufig zur Temperaturmessung benutzt, nachdem vorher die Temperaturabhängigkeit mit einem Gasthermometer gemessen worden ist. Die Sättigungsdrücke von O_2 , N_2 , H_2 , He und von anderen weniger verwendeten Gasen sind an verschiedenen Instituten gemessen worden.

Zur Zeit ist die p - T -Beziehung für 4He genau bekannt und die darauf bezogene T_{58} -Skala für das 4He Gebiet ist international anerkannt worden.

Die thermodynamische p - T -Beziehung von 4He und 3He ist sehr wichtig für die Temperatur-Skala, weil der Dampfdruck für hinreichend niedrige Werte in einer einfachen Beziehung zur Temperatur steht. Für Drucke bis zu etwa 1 atm können Korrekturen noch mit guter Genauigkeit berechnet werden.

Für O_2 , N_2 und H_2 sind von verschiedenen Autoren Daten für die Sättigungsdrücke publiziert worden. Es gibt aber keine international anerkannte p - T -Relationen für diese Gase. Nur ist für O_2 , bei der Definition der internationalen Temperaturskala von 1948, eine Interpolationsformel für Drucke zwischen 660 und 860 mm Hg empfohlen worden. Im allgemeinen ist bei der Wahl einer p - T -Relation sehr zu empfehlen, nicht nur den gasthermometrischen Daten, sondern auch den thermodynamischen Daten Rechnung zu tragen und sich den thermodynamischen Formeln möglichst genau anzuschließen. Die verschiedenen p - T -Relationen für O_2 , N_2 und H_2 weisen Differenzen bis zu einigen hundertstel Graden auf, und es ist immer noch wünschenswert, genauere Daten für diese Beziehungen zu gewinnen.

DIE THERMODYNAMISCHE TEMPERATUR UND DAS GESETZ VON CURIE-WEISS

Das Gesetz von Curie-Weiss, $\chi = C/(T - \Delta)$, enthält zwei Konstante C und Δ . In einfachen Fällen ist Δ gleich Null oder kann Δ berechnet werden. Man braucht dann nur das Verhältnis zweier Suszeptibilitäten

zu messen, um das Verhältnis der Temperaturen zu bekommen. Allerdings misst man gewöhnlich nicht χ , sondern eine lineare Funktion der Suszeptibilität:

$$m = m_0 + a\chi$$

und berechnet die sogenannte magnetische Temperatur, T_m , mit Hilfe der Beziehung:

$$T_m = \frac{A}{m - m_0} + \Delta$$

Hinlängliche Genauigkeit erhält man in der Praxis mit dieser Methode der Temperaturmessung nur bei niedrigen Temperaturen. Für Temperaturen unterhalb 1°K ist sie aber die meist benutzte Methode. Allerdings hat man dann häufig Abweichungen von einfachen Curie-Weiss-Gesetz wegen Auftretens von inneren elektrischen und magnetischen Feldern zu berücksichtigen.

Für die genaue Bestimmung der p - T -Relationen von ^4He und ^3He haben Messungen an paramagnetischen Salzen sehr wichtige Auskunft gegeben.

DER UMKEHRBARE KREISPROZESS

Die Temperaturmessung unterhalb 1°K ruht nur teilweise auf Suszeptibilitätsmessungen an Salzen. Temperaturen nahezu gleich oder kleiner als Δ können nicht mehr genau aus den gemessenen Suszeptibilitäten berechnet werden. Man kann dann einen reversiblen Kreisprozess benutzen. Führt man durch passende Änderungen der magnetischen Feldstärke und der Temperatur das paramagnetische Salz einen ganzen Kreis herum, dann ist die Entropie des Salzes am Ende dieselbe wie am Anfang:

$$\sum \frac{dQ}{T} = 0$$

Es ist üblich, den Kreisprozess auf zwei nebeneinander liegenden Adiabaten ablaufen zu lassen. An den Endpunkten geht man von der einen auf die andere über durch eine geringe Wärmezufuhr oder -abfuhr. Es soll dann

$$\Delta S_a = \frac{\Delta Q_a}{T_a} = \frac{|\Delta Q_e|}{T_e}$$

sein, und wenn Anfangstemperatur T_a und Wärmemengen Q_a und Q_e gemessen sind, kann die Endtemperatur T_e berechnet werden. Oft genügt es, nur eine Wärmemenge zu messen. Die Entropiedifferenz ΔS_a im magnetischen Felde lässt sich dann genügend genau berechnen, und es ist

$$T_e = \frac{|\Delta Q_e|}{\Delta S_a}$$

Ist die spezifische Wärme im Magnetfeld für T_a und ohne Magnetfeld für T_e schon gemessen, dann kann die folgende Beziehung benutzt werden:

$$T_0 = T_H \frac{C_0^*}{C_H} \cdot \frac{dT_0^*}{dT_H}$$

Die spezifische Wärme C_0^* und die Temperatur T_0^* am Endpunkt auf der Adiabate können wie Funktionen eines willkürlichen Parameters gemessen werden. Am häufigsten benutzt man dafür wieder die Suszeptibilität.

SEKUNDÄRTHERMOMETER

Die thermodynamischen Temperaturen werden vielfach mit guter Genauigkeit mit Sekundärthermometern gemessen, die vorher mit Gasthermometern verglichen werden. Die wichtigsten Sekundärthermometer sind Dampfdruckthermometer, Thermoelement, Widerstandsthermometer und Halbleiterthermometer.

(a) Mit Hilfe von Dampfdruckthermometern sind viele Fixpunkte gemessen worden. Die meisten Eichungen an Widerstands- und Halbleiterthermometern werden damit vorgenommen. Bei ganz reinen Gasen wie verflüssigtes He und H_2 misst man den Dampfdruck gewöhnlich unmittelbar am Kryostaten, wiewohl für ganz genaue Messungen die Benutzung spezieller Dampfdruckthermometer zu empfehlen ist, ausgenommen wenn es sich um 4He unterhalb des λ -Punktes handelt.

(b) Das mit dem Gasthermometer geeichte Thermoelement ist ebenfalls häufig für die Bestimmung von Fixpunkten und für Temperaturmessungen zwischen 90° und $10^\circ K$ verwendet worden. Es hat die bekannten Vorteile der geringen Wärmekapazität und des ganz geringen Volumens. Im allgemeinen sind aber die Messungen mit einem Thermoelement weniger genau als die mit einem Widerstandsthermometer.

(c) Die für die Temperaturmessungen zwischen 90° und $10^\circ K$ meistens gebrauchten und zu empfehlenden Widerstandsthermometer benutzen die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Pt, Au oder In. Am besten erforscht ist der Widerstand von fast reinem Platin. Die RT -Beziehung ist jedenfalls zwischen 90° und $10^\circ K$ genügend genau bekannt für Erweiterung der internationalen Temperaturskala bis $20^\circ K$, vielleicht selbst bis $10^\circ K$. Platinthermometer höchster Reinheit stimmen zwischen 90° und $20^\circ K$ in ihren Temperaturanzeigen auf einige wenige tausendstel Grad überein, wenn sie ausser am Siedepunkt des Sauerstoffs und des Wasserstoffs auch am Tripelpunkt des Sauerstoffs geeicht sind und man auf geeignete Weise interpoliert.

(d) Temperaturen in dem Temperaturgebiet von flüssigem Helium lassen sich durch Widerstandsänderungen reiner Metalle nicht messen. Einige wenige Halbleiter wie Germanium und auch manche für Radiotechnik käufliche Kohlewiderstände haben hier einen ganz erheblichen negativen Temperaturkoeffizienten. Besonders bei speziellen Germaniumproben mit einem gewissen Indiumgehalt hat man eine starke Temperaturabhängigkeit zwischen 1° und $5^\circ K$ und eine gute Reproduzierbarkeit gefunden.

(e) Eine fast lineare Temperaturabhängigkeit findet man bei vielen Phosphorbronzethermometern. Ihre Temperaturabhängigkeit verdanken sie der allmählichen Zunahme von ganz dünnen supraleitenden Fäden aus Blei oder Bleilegerungen im Innern der Bronze.

Dazu möchte ich einige erläuterende Bemerkungen machen.

(1) Für Messungen unterhalb 1°K ist die Benutzung des reversiblen Kreisprozesses sehr wichtig. Man lässt ein paramagnetisches Salz einen Kreisprozess durchlaufen, der folgendermassen dargestellt werden kann:

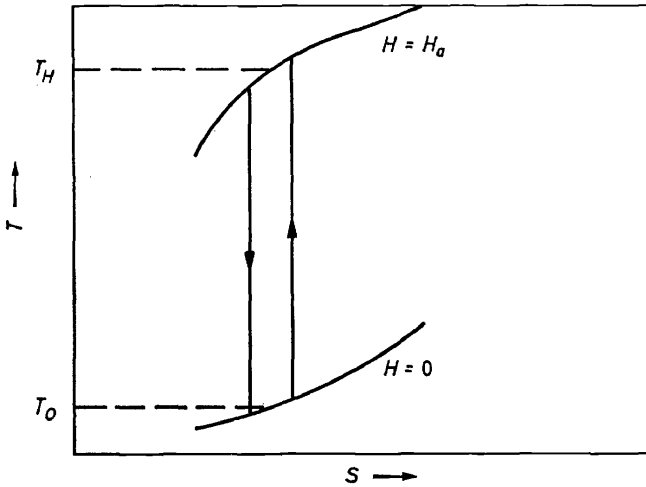


Abb. 1

Hauptsächlich geht der Weg zwei eng nebeneinander liegenden Adiabaten entlang, an deren Enden man durch Wärmezufuhr oder Wärmeabfuhr von der einen auf die andere übergeht. In der Praxis misst man nur zugeführte Wärmemengen in Abhängigkeit eines zweckmässig gewählten Parameters und korreliert die für Feld H und Feld Null gefundenen Werte des Parameters durch Demagnetisierungen und Magnetisierungen nach dem in *Abb. 2* angegebenen Schema.

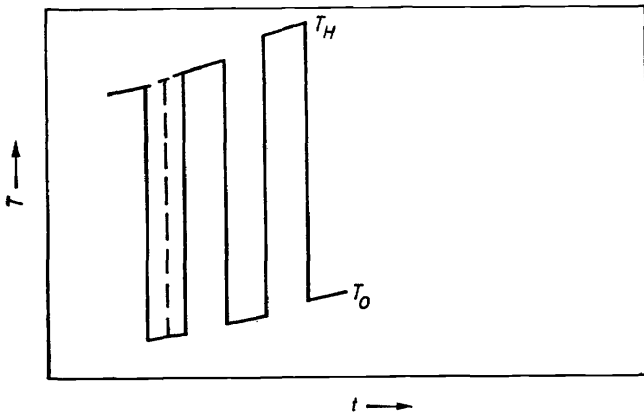


Abb. 2

DIE THERMODYNAMISCHE TEMPERATURSKALA

Wichtig ist, in welcher Weise bei Feld Null die Energie zugeführt und die Temperatur gemessen wird. Im allgemeinen ist es vorteilhaft, die Energie gleichmässig allen Teilen des Salzes zuzuführen. Man kann das z.B. mit γ -Strahlen machen. Führt man die Energie an der Oberfläche zu, dann wird die Temperatur günstig durch Suszeptibilitätsmessungen bestimmt. Die gesuchte Temperatur lässt sich berechnen mit der Formel:

$$T_0 = T_H \frac{C_0^*}{C_H} \cdot \frac{dT_0^*}{dT_H}$$

(2) Die thermodynamische Dampfdruckformel für den Sättigungsdruck des Heliums kann geschrieben werden:

$$\ln p = i - \frac{L_0}{RT} + \frac{5}{2} \ln T - \frac{1}{RT} \int_0^T S_L dT + \frac{1}{RT} \int_0^p V_L dp + \epsilon$$

$$\text{mit } \epsilon = \ln \frac{pV_G}{RT} - \frac{2B}{V_G} - \frac{3C_2}{2V_G}$$

Die ersten drei Terme sind die Hauptterme, die letzten drei sind Korrekturen, die allerdings bei höheren Temperaturen einen ganz beträchtlichen Einfluss haben, aber bei 1,5°K noch so klein sind, dass sich die Formel praktisch auf die ersten drei Termen reduziert. Zur Berechnung der p - T -Relation braucht man dann nur L_0 experimentell zu bestimmen, weil die statistische Thermodynamik nur mit Hilfe von genau bekannten Konstanten imstande ist, i genau zu berechnen. Zur Berechnung von L_0 braucht man nur eine gute gasthermometrische Temperaturbestimmung durchzuführen, die zu einem bestimmten Sättigungsdruck unterhalb 1,5°K gehört. Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung von L_0 oder zur Prüfung des schon gefundenen Wertes hat man, wenn die latente Wärme des verdampfenden Heliums für niedrige Temperaturen schon gemessen ist, weil in erster Näherung $L = L_0 + (5/2)RT$. Auf diese Weise wurde von Verschaffelt ein Wert für L_0 berechnet und eine Dampfdruckformel für $T < 1,475^\circ\text{K}$ aufgestellt, die ein Teil der 1924-Skala war und sich von den heutigen Skalen für $T < 1,475$ nur um einen sehr kleinen Betrag unterscheidet.

Die Korrekturterme der allgemeinen Dampfdruckformel können heute bis 4,2°K so genau berechnet werden, dass man eine p - T -Beziehung bekommt, die die Temperatur bis auf wenige Tausendstel Grad richtig angibt.

Eine noch genauere p - T -Beziehung bekommt man, wenn man bis 2,2°K die thermodynamische Berechnung und für Temperaturen von 2,2° bis 5,2°K die Ergebnisse von Messungen an paramagnetischen Salzen benutzt.

Die Kombination der mit beiden Methoden gewonnenen Ergebnisse lässt auch eine genauere Bestimmung von L_0 (59,62 J/Mol) zu, als es allein mit gasthermometrischen Messungen möglich ist. Auch macht diese Kombination es möglich, die Temperatur des λ -Punktes (2,172°K) mit Hilfe der schon bekannten Werte für die Siedepunkte von H_2 und He bis auf 0,001°K genau zu berechnen, weil auch der Dampfdruck am λ -Punkt

(37,80 mm Hg 0°C) genau bekannt ist. Man findet dies genauer beschrieben in *Physica* 24, 920–930 (1958).

(3) Zur Berechnung einer thermodynamischen Dampfdruckformel für den normalen Wasserstoff kann die Gleichung von Clapeyron benutzt werden:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_G - V_L)}$$

Unter Zuhilfenahme von aus früheren Messungen bekannten Temperaturabhängigkeiten von L , V_G und V_L lässt sich durch Integration eine Näherungsformel für die p - T -Beziehung des normalen Wasserstoffs ableiten, die der Form nach einer von Woolley, Scott und Brickwedde zur Interpolation ihrer Messresultate benutzten Formel genau entspricht.

Die Zahlenwerte der Koeffizienten in beiden Formeln weichen nur wenig von einander ab.

Keesom, Bijl und Van der Horst haben ihre mit einem Gasthermometer gewonnenen p - T -Daten des normalen Wasserstoffs mit einer T - p -Beziehung dargestellt, die sich von der thermodynamischen Beschreibung entfernt. Der Unterschied der von beiden Formeln beschriebenen Temperaturskalen ist maximal 35 m°K, und die Temperaturabhängigkeit des Unterschiedes ist unregelmässig, wie es *Abb. 3* zeigt.

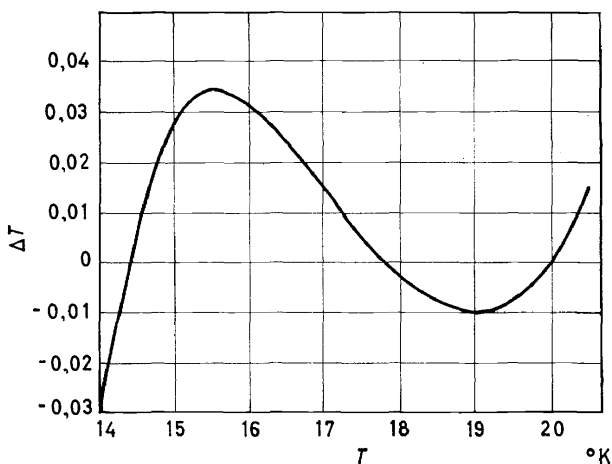


Abb. 3. $\Delta T = T_{\text{WSB}} - T_L$

Neuerdings wurde in Leiden die p - T -Beziehung mit Hilfe von Suszeptibilitätsmessungen an paramagnetischen Salzen neu bestimmt. Es wurde auch durch diese Experimente klar, dass eine sich an die thermodynamische Formel anschliessende Formel die beste ist. Leider sind die zur thermodynamischen Berechnung benutzten Daten nicht so sicher bekannt, wie man das wünschen würde.

Die Suszeptibilitätsmessungen bestimmen die p - T -Beziehung des Wasserstoffs bis auf 0,01°K genau. Wenn man für das He-Temperaturgebiet die

DIE THERMODYNAMISCHE TEMPERATURSKALA

T_{58} -skala benutzt und $20,38^\circ\text{K}$ für den Siedepunkt des normalen Wasserstoffs annimmt, wird für den Tripelpunkt des normalen Wasserstoffs der Wert $13,94^\circ\text{K}$ gefunden. Der von Woolley, Scott und Brickwedde gemessene Wert ist $13,957$. Ein Mittelwert gleich $13,95^\circ\text{K}$ scheint mir heute der empfehlenswerteste zu sein.

(4) Über eine geeignete Weise, Platinwiderstandsthermometer, die an zwei oder drei Fixpunkten geeicht sind, zu interpolieren, möchte ich noch etwas sagen.

Die einfachste Annahme, die man für die Herleitung von Interpolationsformeln machen kann, ist, dass die spezifischen Widerstände der verschiedenen geeichten Thermometer sich nur unterscheiden durch verschiedene temperaturunabhängige Zusatzwiderstände, die von physikalischen und chemischen Defekten herrühren.

Es soll dann die Funktion $(R - R_1)/(R_2 - R_1)$ für alle solche Widerstände gleich sein und man kann sie für die Interpolation benutzen, wenn sie für einen Widerstand mit dem Gasthermometer gemessen ist. Dieses Verfahren genügt nicht für hohe Genauigkeit (bis auf wenige $0,001^\circ\text{K}$).

Macht man die Annahme, dass der Zusatzwiderstand (r) zwar nicht temperaturunabhängig ist, aber für die verschiedenen Widerstände bis auf einen konstanten Faktor (p) und einen konstanten Term (q) die gleiche Temperaturabhängigkeit hat ($R = \zeta + r$ und $r = p\epsilon + q$), dann kann man die folgende Formel benutzen:

$$\frac{R - R_1}{R_2 - R_1} = \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} + \frac{p}{R_2 - R_1} \left\{ \epsilon - \epsilon_1 - (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \right\}$$

Es sind dann $(\zeta - \zeta_1)/(\zeta_2 - \zeta_1)$ und der Klammerausdruck für alle betrachteten Widerstände gleiche Temperaturfunktionen, und der Unterschied zwischen den $(R - R_1)/(R_2 - R_1)$ -Werten von zwei Thermometern ist dem Klammerausdruck proportional. Für diesen Klammerausdruck kann man eine Näherungsformel benutzen, wenn man sie nicht genau kennt oder wenn eine solche einfache Näherungsformel genau genug ist.

Ein Analyse von vorhandenen Ergebnissen zeigt, dass diese Verfahren nur genau genug sind, wenn man sich auf die Platinwiderstandsthermometer von sehr reinem Platin ($\alpha > 0,003923$) beschränkt.

Gute Interpolation kann man auch für etwas weniger reines Platin ($\alpha > 0,003920$) bekommen, wenn man der Interpolation eine Zweibandvorstellung zugrunde legt. In diesem Fall kann man die folgende Beziehung benutzen:

$$\frac{R}{R_0} = \zeta + \left(w_0 + \frac{p_1 \zeta}{\zeta + p_2 \eta} \right) \eta$$

mit $\zeta = \zeta/\zeta_0$; $\eta = \epsilon - \epsilon_0 \zeta$; $w_0 = R_{00}/R_0$; R_0 Eispunkt Widerstand; R_{00} Widerstand für $T = 0$; p_1 und p_2 Konstanten.